129 - Algèbre des polynômes d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

I) L'algèbre K[u] [Cog] + [Gou] + [BMP]

1) L'algèbre K[u] et le polynôme minimal

Déf : algèbre des polynômes en u K[u], morphisme de K[X] dans K[u]. Le noyau est un idéal non trivial (car mph d'espace de dim infinie vers espace de dim finie), c'est l'idéal des polynômes annulateurs. Le générateur de cet idéal est appelé polynôme minimal [Cog 271] [BMP 161]

Rq : en dim infinie, le mph peut être injectif, on ne peut pas définir le polynôme minimal comme ceci [Cog 272]

Rq : un polynôme en u est nul ssi il est divisible par le polynôme minimal. Tous les polynômes en u ne sont donc pas nuls (remarque récurrente du jury).

Prop : la dimension de K[u] est égale au degré d du polynôme minimal *(en effet, par division euclidienne par le polynôme minimal, on voit que K[u]=Ann(u)+K_{d-1}[u]. La somme est bien sûr directe. Si Phi est le morphisme de K[X] dans K[u], la restriction de Phi de K_{d-1}[u] à K[u] est un isomorphisme, donc la dim de K[u] est la dim de K_{d-1}[u], càd d)*
De plus, l'image de la base (1,X,…,X^{d-1}) est une base de K[u] : {Id, u, u²,…,u^{d-1}} [Cog 272]

Prop : Ker(P(u)) est stable par u [Cog 278]

Prop : F sev stable (u(F) inclus dans F). Alors le polynôme minimal de la restriction de u sur F divise le polynôme minimal de u [Cog 278]

Lemme : lemme des noyaux + les projecteurs sur un noyau par rapport aux autres est un polynôme en u [Gou 175 + Gou 194]

Prop : u est diagonalisable ssi K[u] ne contient aucun nilpotent non nul*. (se fait à la main si on se souvient qu'être nul dans K[u], c'est être divisible par mu)*

2) Une première application

Appl : calculer une puissance de matrice. Si P est un polynôme annulateur de A, alors A^k est R_k(A) où R_k est le reste de la DE de X^k par P *(on a intérêt à avoir P minimal)*

3) Polynôme caractéristique et Cayley Hamilton

Th : Cayley Hamilton [Gou 177] *(on se donne x non nul, on regarde {x,f(x),…,f^p(x)} où p est le petit entier tq la famille soit liée (on écrit la relation de liaison). On complète {x,f(x),…,f^{p-1}(x)} en une base de E, la matrice de f est par blocs avec un nul. On calcule le poly caract, il s'annule)*

Csq : E somme directe des SEC

Csq : les racines du polynôme minimal sont aussi racines du polynôme caract. Ainsi, les polynômes minimaux et caract ont même facteurs irréductibles *(pas si facile à montrer ! Ne pas scinder sur C ! On écrit que P est égal au produit des Q_i^n_i, puis E comme somme des SEC E_i, on dit que mu est le ppcm des mu_i des restrictions f_i sur chaque E_i. Q_i^n_i est alors un polynôme annulateur de f_i donc mu_i divise Q_i^n_i. Or Q_i est irred donc mu_i=Q_i^m_i. Du coup mu est égal au produit des Q_i^m_i, et ce sont bien les mêmes facteurs irred [Internet]*
Sinon on mq mu et P ont mêmes racines complexes. Sur C c'est clair que c'est les mêms facteurs irred. Sur R on prend Q irred qui divise les deux. Si le degré de Q est 1 alors c'est bon. Sinon, P = (X-a)(X-bar(a)), donc a et bar(a) sont vp donc divisent les deux [Mon 91 4e edition]
Sinon, [Cog 288])

4) Le commutant [Cog] + [Gou]

Clairement, K[u]⊂ Com(u).

Prop : si u est cyclique, K[u]=Com(u) *(réciproque vraie mais pas facile)*

Prop : u diagonalisable. v ∈ Com(u) ssi les sous espaces propres de u sont stables par v.

Csq : il y a une bijection entre Com(u) et L(E1) x … x L(Er) donc dim(Com(u))=∑ (dim(Ei))^2 [Gou]

II) Polynôme caractéristique et polynôme minimal

1) Réduction

Polynôme minimal, caractéristique, CNS, diagonalisation, trigonalisation

2) Endomph semi simples [Gou]

3) Endomorphismes cycliques et décomposition de Frobenius [Gou 289]

Qui serviront pour Frobenius

Def : E_x={P(u)(x), P}. P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal {P tq P(u)(x)=0}.

Prop : E_x est un ev de dimension le degré de P_x, et on a une base.

Prop : il existe x tq P_x = polynôme minimal

Def : u est cyclique s'il existe x tq E=E_x, ce qui équivaut à pol caract = pol min = P_x.

Prop : tout endomph cyclique est semblable à une matrice compagnon

Théorème : invariants de similitude

Appl : Com(u)=K[u] ssi u est cyclique [Gou 292] *(les invariants servent pour le sens direct)*

III) Exponentielle de matrice

1) Quelques propriétés

Prop : exp(u) est un polynôme en u.

2) Dunford [Gou 193]

Nécessite le polynôme caractéristique scindé !

Th : Dunford *Comme on sait que les projecteurs p_i sont des polynômes en f, on pose d=sum(lambda_i*p_i), et n=f-d.*

3) Calcul d'exponentielle

: calculer une exp de matrice sur un exemple. *Si une matrice vérifie (A-Id)(A-2Id)=0, on note p la proj sur Ker(A-Id) parallèlement à Ker(A-2Id) et q=Id-p. Alors exp(A)=exp(A)p+exp(A)q. Or exp(A)p=exp(2Id)exp(A-2Id)p=exp(2)*sum((A-2Id)^n/n!)p=exp(2)p car (A-2Id)op=0. Exp(A)q=exp(1)exp(A-Id)q=e(Id+A-Id)q=eAq. Par Bézout, 1=a(X)(X-1)+b(x)(X-2), on peut calculer a et b. En combinant Bézout avec p+q=1, on trouve p et q, et donc exp(A)* [Mn 23]
On reviendra sur ces calculs plus tard.

Appl : calcul de puissance (formule binôme) et d'exponentielle [Gou 196]
Pour calculer l'exp, on écrit que *d=sum(lambda_i*p_i) et n=sum((f-lambda_i*Id)*p_i)*

*On a alors exp(d)=sum(exp(lambda_i*p_i)) et on calcule aussi exp(n) en fonction des p_i. On finit par Dunford en disant que exp(f)=exp(d)exp(n), exprimé en fonction des p_i, qu'on peut calculer par DES et Bézout.*

4) Image de l'exponentielle

Appl : u un automorphisme complexe. Alors il existe un polynôme P tq u=exp(P(u)) [BMP 213] *(se sert de l'inversion sur les unipotents !! M dans GLn(C). Dunford : M=D+N, D a les même vp que M donc inversible. M=D(Id+D^-1N). Comme exp :C->C* est surj, pour chaque valeur propre lambda, il existe un mu tq exp(mu)=lambda. On définit Q le poly interpol de Lagrange qui passe des lambda_i aux mu_i. On a donc exp(Q(D))=D (calcul). Or D est un poly en M : D=P(M). Donc D=exp(QoP(M)). Etude de X=I+D^-1N : unipotente. X=exp(logX). Mq logX est un polynôme en M. Le poly caract de D a un coeff constant non nul car D inversible donc D^-1 est un poly en D, qui est lui-même un poly en M donc D^-1 est un poly en M. Dunford : N est un poly en M. Donc X aussi, donc logX aussi. logX=R(M). M=exp(QoP(M))exp(R(M))=exp(R+QoP(M)) gagné).*

Appl : A une matrice de GLn(R) qui admet une racine carrée. Il existe un polynôme P tq A=exp(P(A)) [BMP 215] *(Se sert du cas complexe !! Rq : c'est clair pour n=1. Une inclusion claire : A dans exp(Mn(R)), A=expB. Alors A inversible et exp(B/2)²=A. Autre inclusion : A dans GLn(R) tq A=B². B est dans GLn(C) donc il existe un poly Q tq B=exp(Q(B)). B=conj(B)=exp(conjQ(B)). Q(B) et conjQ(B) commutent donc A=Bconj(B)=exp((Q+conjQ)(B)) et Q+conj(Q) est un poly réel donc c'est bon)*

Développements :
Image de l'exponentielle matricielle [BMP 213] (* ou **)
Endomorphismes semi-simples [Gou Alg 224] (* ou **)
Commutant (cas diagonalisable, CNS cyclique) [Gou] (**)

Bibliographie :
[Cog]
[BMP]
[Gou]

Rapport du jury : ce n'est pas une leçon sur la réduction. Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Les candidats doivent connaître sans hésiter la dimension de l'algèbre **K**[*f*]. Les propriétés globales pourront être étudiées (dimension, commutant). Il faut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Les candidats peuvent présenter des conditions caractérisant les polynômes en *f* parmi tous les endomorphismes. L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Les polynômes d'endomorphismes permettent de calculer les puissances d'un endomorphisme. On fera le lien avec les suites récurrentes linéaires ou les équations différentielles linéaires d'ordre n. On n'exige pas le théorème du bicommutant. Par exemple, le calcul des puissances ou de l'exponentielle d'une matrice peuvent illustrer cette leçon (sans passer par la décomposition de Dunford) : voir le rapport 2005. On attend aussi pour les meilleurs quelques résultats concernant l'algèbre formée par les polynômes d'une matrice (dimension, commutant etc.).